随机过程初步

一：~~确定~~. 随机信号

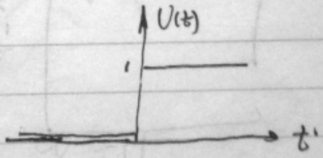
信号：取值（时域上）服从某种规律

$\begin{cases} \text{随机信号.} & \text{概率性.} & \text{取值随机} \\ \text{确定性信号.} & \text{确定性规律} & \text{取值确定} \end{cases}$

确定性信号举例

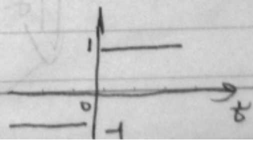
阶跃信号

$U(t)=\begin{cases} 1, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

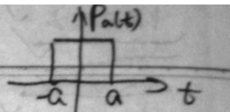


符号信号

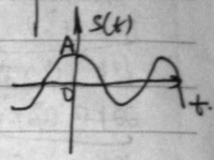
$sgn(t)=\begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$



矩形脉冲 $P_a(t)\begin{cases} 1 & |t|\leq a \\ 0, & |t|>a \end{cases}$



正弦波信号. $s(t)=A\cos(\omega_c t$



随机信号举例

$s(t)=A\cos(\omega_c t+\theta)$ 均匀分布

θ 服从 $f(\theta)$. $f(\theta)=\begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi\leq\theta\leq\pi \\ 0. & \end{cases}$

随机信号特点 $\begin{cases} \text{取值不确定性.} \\ \text{符合某种统计规律.} \end{cases}$

二：随机过程的数字特征

1. 均值函数（期望值）.

$$E\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,t)\,dx.$$

$X=x(t)$ 的概率密度函数

2. n阶矩

$$E\{x^n(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x,t)\,dx.$$

3. 方差. $D[x(t)]=E\{[x(t)-\mu_x]^2\}$

4. 协方差

$$C_{xx}(s,t)=E\{[x(s)-E\{x(s)\}][x(t)-E\{x(t)\}]\}$$

若 $s-t=\tau$. 则 $C_{xx}(\tau)=E\{[x(t+\tau)-\mu_x][x(t)-\mu_x]\}$

互协方差 x 换 y.

六. 相关函数.

$R_x(\tau)=E[x(t-\tau)x(t)]$

互相关函数 x 换成 y.

三. 平稳随机过程.

1. 广义平稳

满足条件:

① 均值. μ_x = 常数.

② 二阶矩有界 即 $E\{x^2(t)\}<\infty$

③ 协方差只与时间间隔有关.

$C_{xx}(\tau)=E\{x(t)-\mu_x\}E\{x(t-\tau)-\mu_x\}$.

①②③可总结为.

$R_x(t_1,t_2)=R_x(t_1-t_2)$

各态历经性.

$\mu_x=\frac{1}{N}\sum x(n)$

2. 严格平稳.

满足条件:

$\{x(t_1+\tau), x(t_2+\tau), \ldots x(t_k+\tau)\}$.

和 $\{x(t_1), x(t_2), \ldots x(t_k)\}$.

联合分布对所有 τ, $(t_1 \ldots t_k)$ 均相同

统计特性 概率密度分布已与时间无关

四：功率谱密度.

1. 定义. 作傅里叶变换.

功率谱 $X_T(f)=\int_{-T}^{T}[x(t)-\mu_x]e^{-j2\pi ft}dt$.

平均功率谱. $P_T(f)=E\left\{\frac{|X_T(f)|^2}{2T}\right\}$.

功率谱密度: $P_{xx}(f)=P_T(f)\Big|_{T\to\infty}$

~~维纳—辛钦定理.~~

2. 求

$$p_{xx}=\int_{-\infty}^{+\infty}C_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$p_{xx}(f)\longleftrightarrow C_{xx}(\tau)$$

3. 维纳—辛钦定理.

$$C_{xx}(\tau)=E\{(x(t)-\mu_x)(x(t-\tau)-\mu_x)\}.$$

条件. 平稳 均值为0.

若 $\mu_x=0$ 时

$$C_{xx}(\tau)\Big|_{\mu_x=0}=E\{x(t)\,x(t-\tau)\}=R_{xx}(\tau)$$

$$p_{xx}(f)\longleftrightarrow R_{xx}(\tau)\Big|_{\mu_x=0}$$

$$p_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{xx}(f)e^{j2\pi f\tau}df.$$

例 1.2-1

最小二乘估计

$A\Theta = b + N$　A为系数矩阵　Θ向量
b观测值向量

若 $E = A\hat{\Theta} - b$

则 $\sum e^2 = E^T E = (A\hat{\Theta} - b)^T (A\hat{\Theta} - b)$

令 $J = E^T E$

$\frac{\partial J}{\partial \hat{\Theta}} = 0$

则 $2A^T A\hat{\Theta} - 2A^T b = 0$

$\therefore A^T A \hat{\Theta} = A^T b$

若 $\hat{\Theta} = (A^T A)^{-1} A^T b$

A需满足

① 非奇异 (A^TA的逆存在) $\Rightarrow$ 列满秩

② 高矩阵

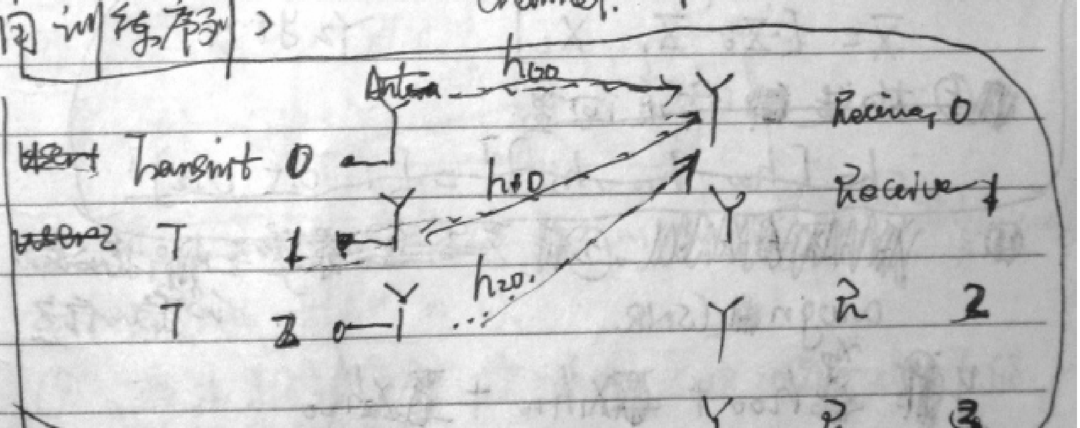
练习试在一个多输入多输出(MIMO)的无线通信系统中，用最小二乘法估计信道，该系统估计所采用的参数如下.

(在无线MIMO通信系统中，多个用户共享通信系统，每个用户单独采用自己的天线发送数据。发射端 在接收端用多个天线接收数据。每个天线的接收数据为发射端各个用户发射数据经过不同的信道以后的叠加。)

① MIMO系统为1个3输入4输出系统如图

② 设该无线通信系统的信道为单径信道。各信道参数如下：$h_{00}=1$，$h_{10}=0.5$，$h_{20}=0.2$ 请估计这三个信道。

③ 用户0.1.2所采用的训练序列为可以用随机产生的8PSK调制信号。(通常发射端发射数据对接收端是未知的。所谓训练序列是双方预先规定好的信号。该信号是对接收方透明的。估计信道和同步均可采用训练序列)



④ 噪声采用高斯白噪声。在分别在信噪比0~12dB下估计。

⑤ 训练数据的块长为16，即一个帧中有16个数据，请在一个块中估计信道。

习题求解

$\bar{X}_0 = [x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \cdots x_{15,0}]^T$ 为用户0发射的数据

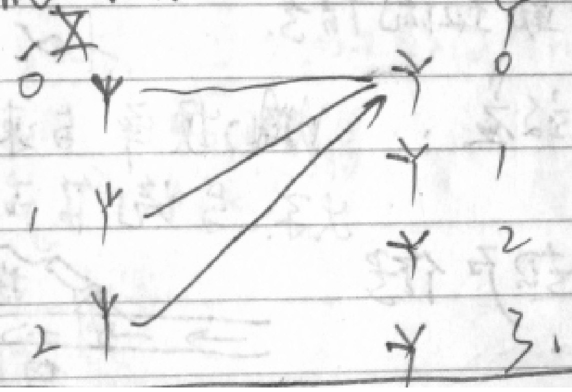
$\bar{X}_1 = [x_{0,1}, x_{1,1}, x_{2,1} \cdots x_{15,1}]^T$ …… 1 ……

$\bar{X}_2 = [x_{0,2}, x_{1,2}, x_{2,2} \cdots x_{15,2}]^T$ …… 2 ……

$X = [\bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2]$ $\qquad Y = [y_0, y_1, \cdots y_{15}]^T$

$Y = Xh + N$ $\qquad h = (X^T X)^{-1} X^T Y$

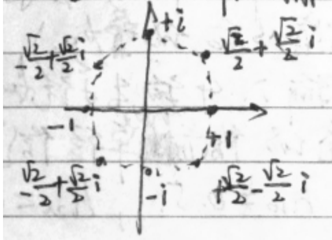
X：列满秩、



程序分析：

① 产生三个用户的 8PSK 的随机信号，

以用户1为例，x_0 = randint(15, 1, 8).



$$\begin{cases} 0 \to +1 \\ 1 \to \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 2 \to +i \\ \vdots \\ 7 \to \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

y = function(x)

x_0 = Modulate8psk(a_0)， 可以编函数.

x_1 = ⋯

x_2 = ⋯

② 产生三个用户接收端的合成信号

awgn(SNR.

$y = x_0 h_{00} + x_1 h_{10} + x_2 h_{20}$.

③ 产生白噪声，

y_N = awgn(y, SNR, 'measured')

$y = [y_0, y_1, \cdots, y_{15}]^T$ $|N|^2 = \frac{SNR}{10}$

$|y|^2 = a^2+b^2$ $SNR = 10\lg\frac{|y|^2}{|N|^2}$

randn， $|N|^2 = \frac{|y|^2}{10^{\cdots}}$

③ 构造矩阵 X. ④ 构造Y矩阵

$X = [X_0\ X_1\ X_2]$ $Y = y + N$

⑥ $\hat{h} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

$\hat{h}$ = pinv(X)*Y

⑦ ~~随信噪比 SNR~~ 的 MSE = $|\hat{h}-h|^2$，其中 $h = [1, 0.5 \cdots]$

⑧ 仿蒙特卡罗 n 次.

⑨ 画出 信噪比 SNR 0到12dB 下的均方误差曲线.

专题二 贝叶斯估计

一：参数估计 的贝叶斯派
和经典派

已知：样本 Y 求
求：估计 θ

1. 经典概率派解

前提：θ是一个确定的未知量

观点：概率为事件大量重复实验的概率的极限值

$Y(n)=0,\ n=0 \ldots N$

$Y \sim f(Y,\theta)$

缺点：重复多次

贝叶斯估计：

经典的概率 频率派 $E(\theta) = \frac{\sum^{N}\theta}{N}$

贝叶斯派 $E\{\theta|Y\}$

贝叶斯公式 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

~~二：贝叶斯参数估计~~

$P(AB) = P(B|A)P(A)$

2. 贝叶斯派

前提：θ是一个随机变量 即$\theta \sim f(\theta|Y)$

有一次观察样本也可确定

$f(\theta,Y) =$

贝叶斯公式：

先验→后验

二：贝叶斯参数估计：

1. 方法：定义代价函数 $c(\hat{\theta},\theta)$

表示 $\hat{\theta}$ 与 θ 的相似程度，当相等就等于0.

使 $\underset{\hat{\theta}\in\Theta}{\arg\min}\, E\{c(\hat{\theta},\theta)\} =$

2. 常用代价函数

① 二次型

$c(\hat{\theta},\theta) = (\hat{\theta}-\theta)^2$

② 绝对型

$c(\hat{\theta},\theta) = |\hat{\theta}-\theta|$

③ 均匀

$c(\hat{\theta},\theta) = \begin{cases} 0 & |\hat{\theta}-\theta| < \Delta \\ 1 & |\hat{\theta}-\theta| \geq \Delta \end{cases}$

三、三种贝叶斯估计方法。

Y：样本观测

1. 二次型贝叶斯

$$E\{C(\theta,\hat{\theta})\} = \int_Y\int_\theta (\theta-\hat{\theta})^2 f(Y,\theta)\,dY\,d\theta$$

$$= \int_Y\left[\int_\theta (\theta-\hat{\theta})^2 f(\theta|Y)\,d\theta\right] f(Y)\,dY$$

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\hat{\theta}\in\Phi} \int_\theta (\theta-\hat{\theta})^2 f(\theta|Y)\,d\theta$$

均值

$$\hat{\theta}(Y) = \int_\theta \theta f(\theta|Y)\,d\theta$$

2. 绝对型

$$E\{C(\theta,\hat{\theta})\} = \int_Y\left[\int_\theta |\theta-\hat{\theta}| f(\theta|Y)\,d\theta\right] f(Y)\,dY$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} f(\theta|Y)\,d\theta = \int_{\hat{\theta}}^{\infty} f(\theta|Y)\,d\theta$$

中值

3. 均匀型

$$E\{C(\theta,\hat{\theta})\} = \int_Y \left[\int f(\theta|Y)\,d\theta - \int_{\hat{\theta}-\Delta/2}^{\hat{\theta}+\Delta/2} f(\theta|Y)\,d\theta\right] f(Y)\,dY$$

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\hat{\theta}\in\Phi} f(\hat{\theta}|Y)$$

~~[illegible]~~ 极值

亚龙纸制品

叶斯估计 练习.

在被动RFid系统中，阅读器通过一定规[illegible]
识别标签，例如，动态 Aloha 协议和二进制
[illegible]协议。在动态 Aloha 协议中，假定阅读
识别一组标签的时间分为若干个周期，一个周期
分为若干个帧，每个帧又分为若干个时隙，
标签只能在规定的时隙内被[illegible]与阅读器
[illegible]通信。标签选择时隙是随机
均匀分布的 A~(0,L)，A为标签时隙（L为帧长）
根据每个时隙内，标签与阅读器[illegible]
的时隙[illegible]可分为成功（时隙内1个标签），
空闲（0个标签）和冲突。在动态 Aloha
协议中，[illegible]标签识别[illegible]帧长
[illegible]，若标签[illegible]会使冲突时隙过多
[illegible]标签数与帧长相等时识别效率最高，但标
[illegible]需要估计。对于阅读器，一个
[illegible]可以获得 C_0，[illegible] C_1 [illegible] C_k
[illegible]（C_0, C_1, C_k）
[illegible]估计方法[illegible]
[illegible]编程语言实现

背景

被动式 RFID 系统[illegible]冲突

[illegible]冲突

2. Aloha 解决冲突

识别过程 [x|x|x|0| ... |x] 时隙 帧1

[x|xx| ... |0]

3. [illegible]

当 n=L 时，识别效率[illegible]

标签估计方法：用一个帧中的 C_0, C_1, C_k 估计

标签估计方法：用一个帧中的 C_0, C_1, C_k 估计

贝叶斯估计：只用一个帧的结果

问题.解.

一个时隙内有r个标签应答的概率,

$$p_r=\binom{n}{r}\left(\frac{1}{L}\right)^r\left(1-\frac{1}{L}\right)^{n-r}$$ 其中,帧长L.标签数n

$p_0=\left(1-\frac{1}{L}\right)^n$ $p_1=\frac{n}{L}\left(1-\frac{1}{L}\right)^{n-1}$ $p_k=1-p_0-p_1$

$$p(n|c)=\frac{L!}{c_0!\,c_1!\,c_k!}\cdot p_0^{c_0}\,p_1^{c_1}\,p_k^{c_k}$$

$C=[c_0,c_1,c_k]^T$

N:最大值.

均方估计:
$$\hat{n}=\sum_{n=1}^{N} n\,\bar{p}(n|c)=\frac{\sum_{n=1}^{N} np(n|c)}{\sum_{n=1}^{N} p(n|c)}$$

绝对估计:
$$\sum_{n=1}^{\hat{n}} p(n|c)=\sum_{n=\hat{n}}^{N} p(n|c).$$

$$\arg\min_{n\in\Omega}\left(\text{— — — —}\right).$$

$$\Omega\in[c_1+2c_k,\ N]$$

后验概率:
$$\hat{n}=\arg\max_{n\in\Omega} p(\hat{n}|c)$$

正态分布下的均值,中位,极值

经典概率论的方法

程序分析　Matlab 语言

NO.

Date

1 产生 n 到 (0, L) 内的均匀分布随机序列　randint

2 记录有多少个 C_0, C_1, C_k 个时隙

循环 for i=1:L
if Num==0　C_0++
elseif Num==1　C_1++
else　C_k++
end

3 构造条件 C 下 n 的概率

$P(n|C) =$ ____

4 估计

(1) 均方估计　$\hat{n} =$ ____　for $\hat{n}$=1:N

(2) 绝对估计　$B_{Abs}(\hat{n}) = \sum_{n=1}^{\hat{n}} P(\hat{n}|C) - \sum_{\hat{n}=1}^{N} P(\hat{n}|C)$

end

$\hat{n} = \min(B)$

(3) 后验概率

for $\hat{n}$=1:N

$B_{post}(\hat{n}) = P(\hat{n}|C)$

end

$\hat{n} = \max(B)$

5 实验结果

(1) 相对误差 $e = \frac{\hat{n}}{n} \times 100\%$

(2) 计算随 n 变化下的 e

(3) 采取各种方法计算 e 以求均值

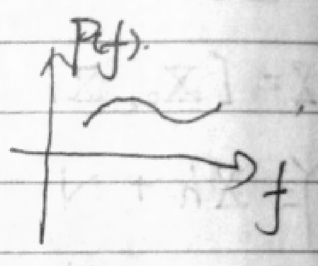
(4) 画出曲线

Date

非参数化功率谱估计
及短时傅立叶变换

一、何为功率谱

能量与频率的关系图



二、应用例子

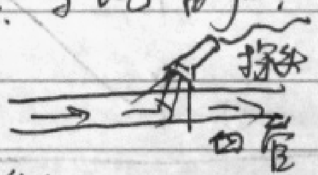
如，多普勒血流信号

$f \propto v$

多普勒效应：频率与速度的关系

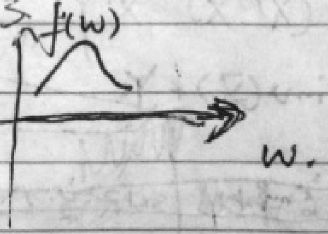
火车与汽笛声

用多普勒超声信号



得到的信号为时域信号

频谱图



分析频谱图帮助诊断

三、非参数化谱估计——经典谱

非参数化，不适用模型

优点：简单

缺点：分辨率低

参数化，适用模型

缺点：分辨率高

基于傅立叶变换

1. 直接法.

N个数据样本, $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$

傅立叶变换 $X_N(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega}$.

$$P_x(\omega)=\frac{1}{N}|X_N(\omega)|^2$$

2. 间接法.

利用维纳-辛钦定理

$$R_x(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n+k)\,x^*(n).\quad k=0,1,\ldots,M$$

$$P_x(\omega)=\sum_{k=-M}^{M} R_x(k)e^{-jk\omega}.$$

(2) 短时傅立叶变换.

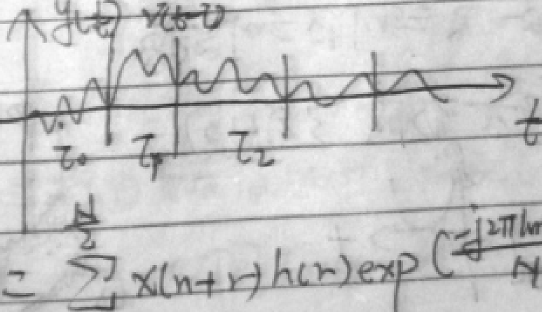
1. 应用范围:

采用傅立叶变换的谱估计, 应用于平稳信号

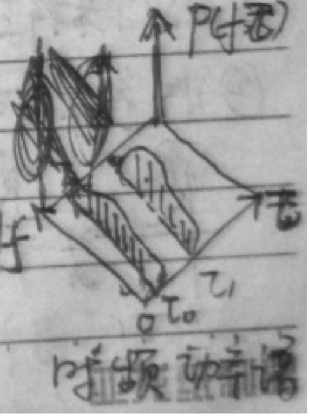
非平稳信号不适用.

一类特殊信号 在较短时间内是平稳的

$$STFT(\tau,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)\,\overline{v(t-\tau)}\right]e^{(-j2\pi ft)}\,dt$$



$$\Phi(k)=\sum_{r=-N/2}^{N/2} x(n+r)h(r)\exp\left(\frac{-j2\pi(n+r)k}{N}\right)$$



时频功率谱

练习：有一段 ~~蠕动泵~~ 多普勒 血流信号

该信号是用一蠕动泵，泵水箱里的模拟血液

流过血管，然后用多普勒探头采集的信号。

该信号采样频率为5000Hz，即0.2ms采集一点，

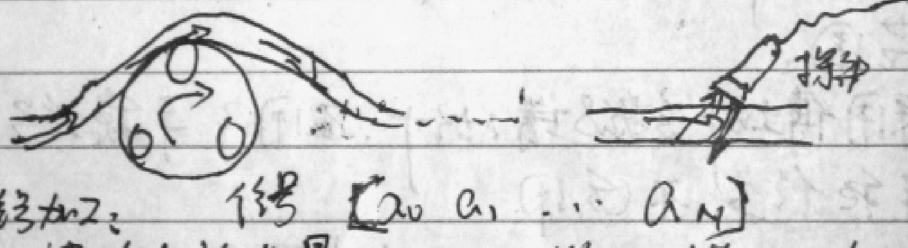
然后用 A-D 转换器变为数字信号。该

A-D转换器最大采样电压为5V，分辨率为

255。请用直接法的非参数化功率谱估计方

法画出其时频谱三维分布图、短时傅立叶

变换的时间窗可采用10ms，即50个采样点



信号加工： 信号 [x_0 a_1 … a_N]

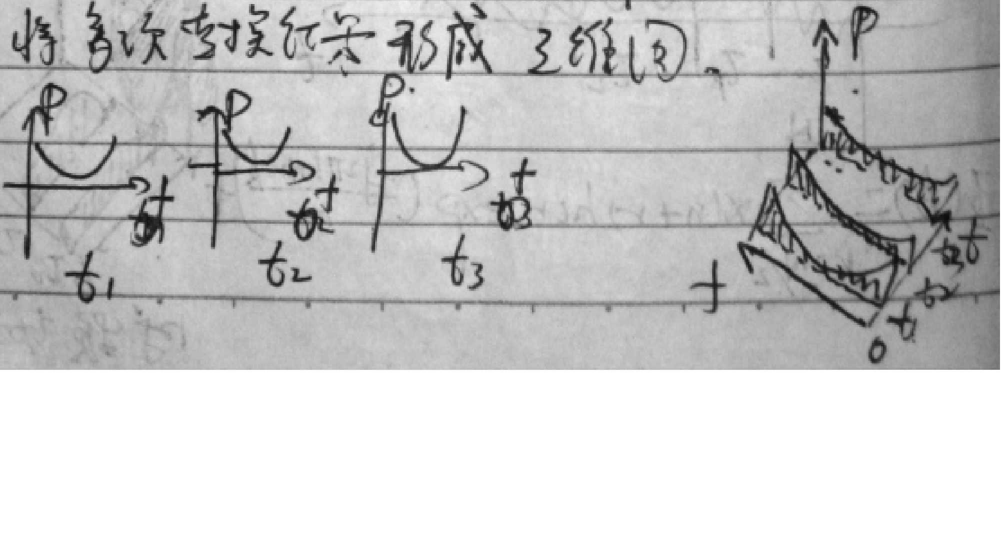
① 消除直流分量 ② 数→模转换

③ 时间变换

请估计

① 每50个采样点做一次短时傅立叶变换

② 将多次变换结果形成三维图。



程序[分析2d]=比2

1. 多普勒数字信号处理.

fid=fopen(*.dat)

① 打开信号.

(1) 信号的提取: 从*.dat文件中提取出信号将其赋予一向量.

② 读取信号. signal=fread(fid,N) N=60000

③ 关闭信号. fclose(fid)

~~VAAA.~~ 向量的数据的是数字,不代表任何的具体的物理量 X=[100, 125, 200, ...]

(2). 数一模转换. (2, t, t0)

① ~~[illegible]~~ 把数字转换为电压值. signal.*5.0/255

② 转换为横坐标的时间. 0.2ms累计 t=0.2:0.2:12000

(3) 消除直流分量. signal=signal-mean(signal)

(4) 画图验证是否为多普勒超声信号.

纵坐标为电压值(v) xlabel('Time(ms)') plot(t,S)

横 ~ 时间(ms) ylabel('Amplitude(V)')

(5) 截取一段信号. 比如:2~3个脉动的周期

S2=S1(21000:32000)

$P(t)$ $= fft(S_2(t = t + 50))$　$f=50$

2. 短时傅立叶变换、

多普勒信号在、很短的时间内的平稳信号.

设时间窗为10ms.

3. 直接法计算功率谱　　$S(t) = [abs\,P(t)]^{\wedge}2$

求其模的平方.

4. 构建三维向量.

x: 时间 t (ms)

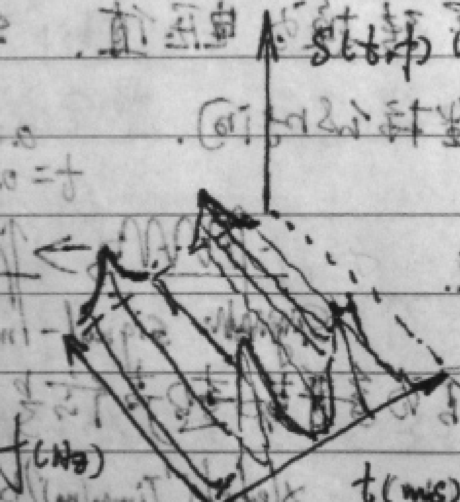
y: 频率 f (Hz).

z: 功率 S(t)(w)

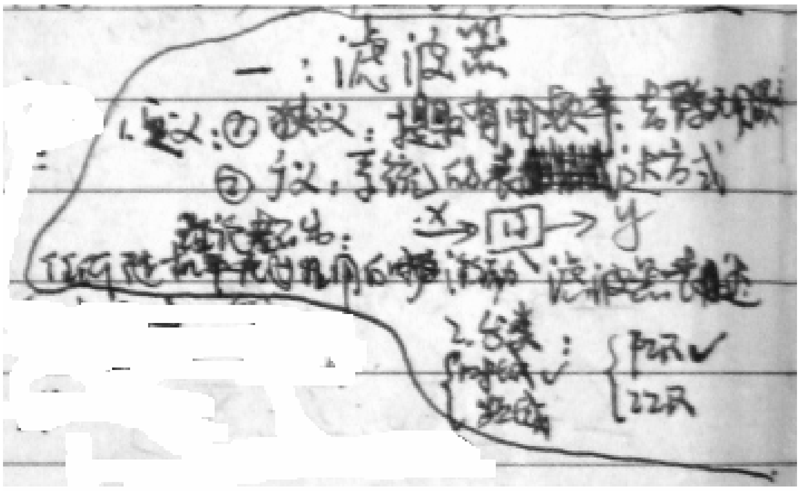
5. 画出时频谱三维坐标图:

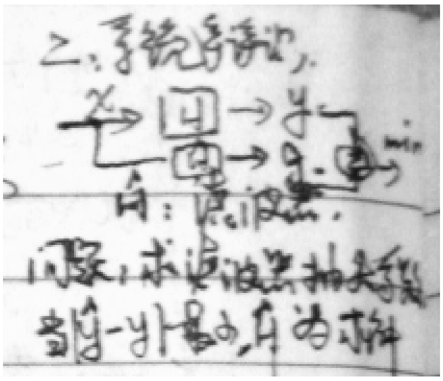
mesh(t, f, S)

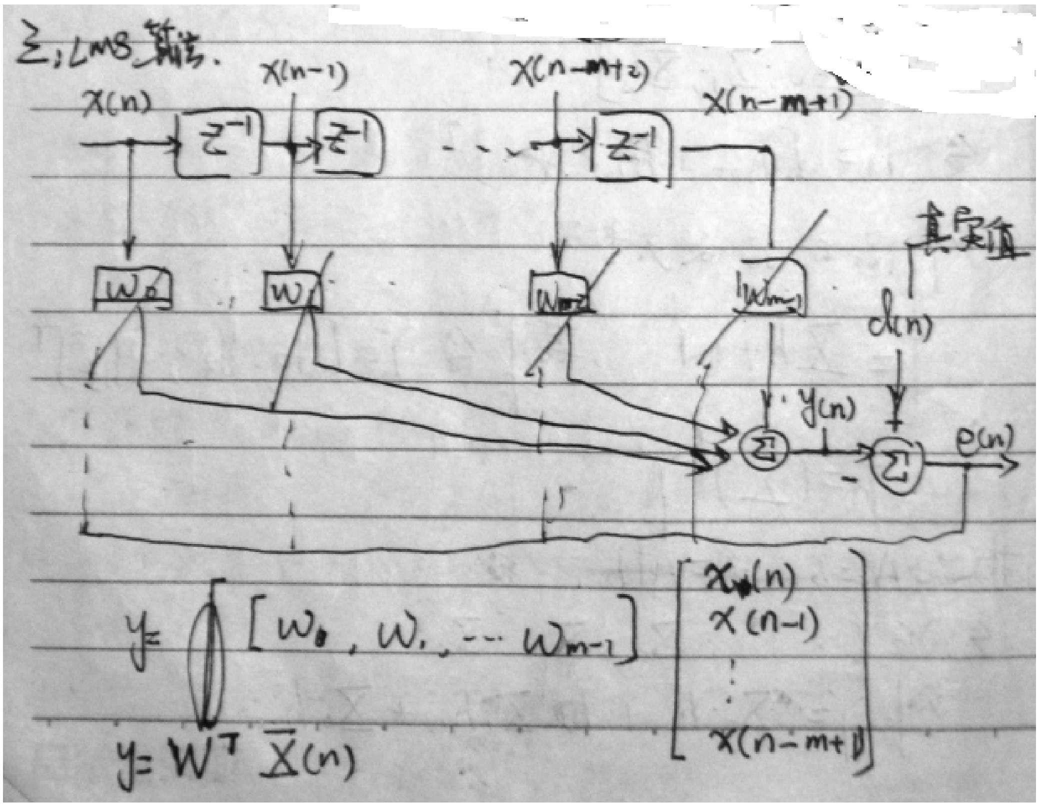
结果



LMS 自适应滤波器


一：滤波器
x
y
2.分类


二：系统辨识
x
y
min


三：LMS算法
x(n)
x(n-1)
x(n-m+2)
x(n-m+1)
z-1
W0
W1
Wm-1
真实值
d(n)
y(n)
e(n)
y=[W0, W1, ... Wm-1]
x(n-1)
x(n-m+1)
y= W T X(n)

其中，$W=[w_0, w_1, \cdots w_{m-1}]$

$X(n)=[x(n), x(n-1), \cdots x(n-m+1)]$

$e(n)=d(n)-y(n)$

$J(n)=e^2(n)=[d(n)-W^T X(n)]^2$

$\nabla J(n)=\frac{\partial e^2(n)}{\partial W}$

$=-2e^*(n)X^*(n)$

*表示共轭

梯度法迭代公式可表示为：

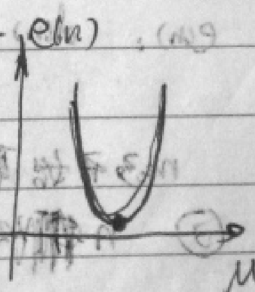
$W(n+1)=W(n)+2\mu e^*(n)X^*(n)$，其中$\mu$为步长.

LMS算法的步骤：

① 初始化 $W(0)=0$，$0<\mu<\infty$

② $W(n+1)=W(n)+2\mu e^*(n)X^*(n)$

③ 判断是否收敛，若不收敛，令 $n=n+1$ 返回步骤2.



练习：假定 $W=[1, 0.5, 0.3]^T$，①输入信号为~~均值为0，方差为1的高斯白噪声~~ [0,1]之间的均匀分布的随机信号，调制方式为BPSK，请用LMS算法估计W

~~$\mu=0.01$, 0.03, 0.3~~, 0.5

② 输入为正弦信号，用LMS算法估计W。步长分别取为$\mu=0.01, 0.03, 0.3, 0.5$时，观测输出结果。

程序分析　　一：输入为随机信号

(1) 构造输入信号 ~~...~~ 随机 ~~randn~~

① 产生均值~~为0，方差为1的正态分~~布信号 $x(n)$

② 将该信号用8psk信号调制　$x_{psk}(n)$

(2) 构造真实的滤波器输出信号 $d(n)$　W_n

① 8psk的调制信号通过滤波器　$x_{psk}(n)$

② 加上高斯白噪声　$x_{psk}(n) * W(n) + awgn$

(3) LMS 算法：

① 初始化．$\hat{W}(0)=0$　$\hat{W}(0)=[0,0,0]$

② $\hat{W}(n+1)=\hat{W}(n)+2\mu e(n)X^*(n)$

μ：根据题意选择步长．

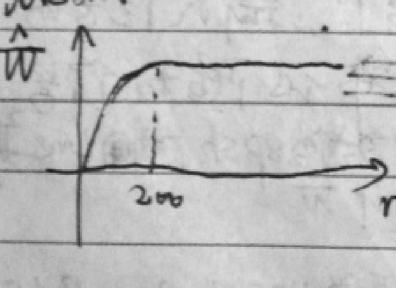
$e(n)$：$d(n)-y(n)$．其中 $y(n)=\hat{W}(n)\cdot X(n)$

$X(n)=[x_{psk}(n), x_{psk}(n-1), x_{psk}(n-2)]^T$

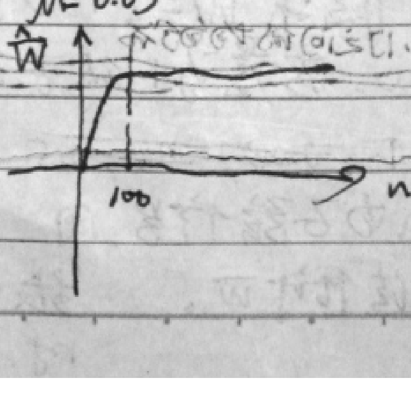
n=3开始取

③ n从3循环至1000．观察结果是否收敛．

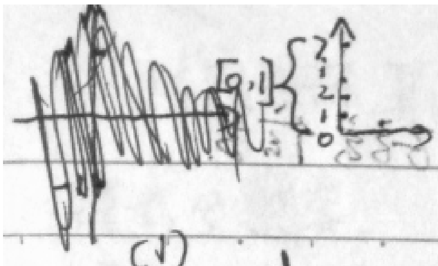
$\mu=0.01$

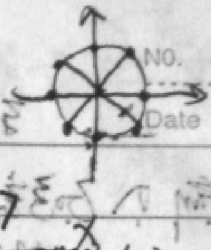


$\mu=0.03$



结果．





m=0:7

$x_{psk}(n) = \cos\frac{m}{4}\pi + i\sin\frac{m}{4}\pi$

(1)

→ ① rand. if $\frac{m}{8} \le x(n) < \frac{m+1}{8}$

→ ② 均值为0，方差为1，∴从0到1分成8份，落在哪一份就对应于星座图的那一个点.

(2)

→ ① 卷积计算 $y_{psk}(n) = x_{psk}(n)\, w_0 + x_{psk}(n-1)\, w_1 + x_{psk}(n-2)\, w_2$

$y_{psk}(n) =$ filter(xpsk , w)

→ ② $d(n) = y_{psk}(n) + awgn$

(3) ① $\hat{w} = [0, 0, 0]$ 或 zeros

② for n=1 : 1000

$X(n+2) = [x_{psk}(n+2), x_{psk}(n+1), x_{psk}(n)]$

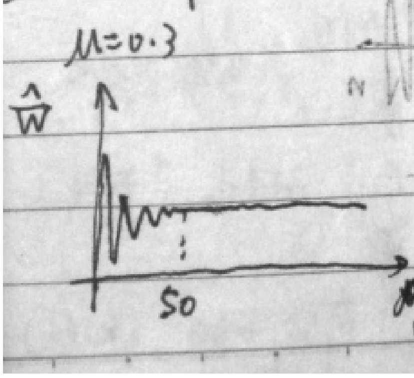
$y(n+2) = \hat{w}(n) \cdot X(n+2)$

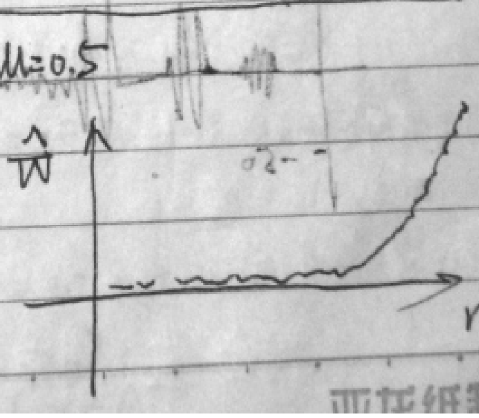
$e(n+2) = d(n+2) - y(n+2)$

$\hat{w}(n+1) = \hat{w}(n) + 2\mu \cdot e^*(n+2)\, X(n+2)$

end.

③ 用plot画出图.





二、输入为正弦信号.

构造输入正弦信号.

$x(t) = \sin(wt)$.

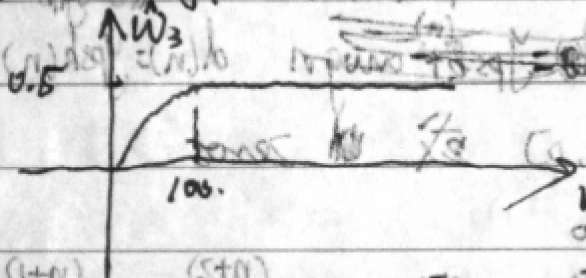
for $n=1:1000$;

$x(n) = \sin(0.01\pi n)$

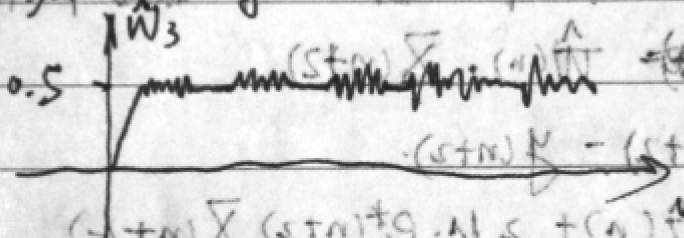
end

结果：w_5 w_3 的图.

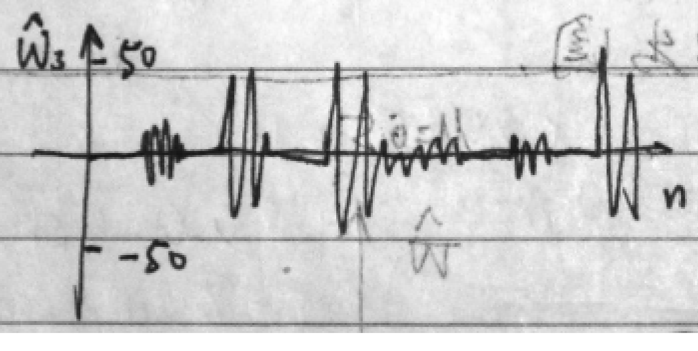
① $\mu = 0.001$ 时.



② $\mu = 0.3$ 时



③ $\mu = 0.5$ 时



梯度算法在模式分类中的应用

一：模式分类。

1. 原理、定义.

模式分类：对于现存的对象，不同对象如何分类？

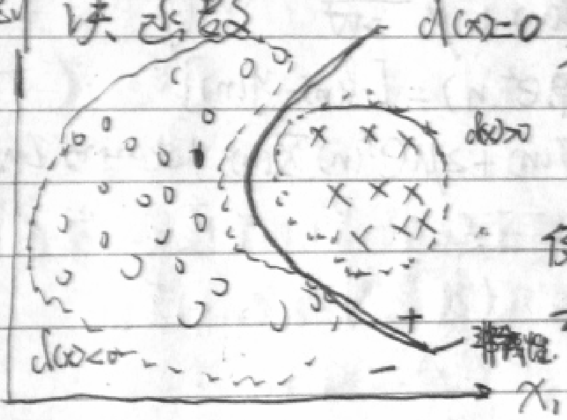
通常采用判决函数.

例子：水果分类.

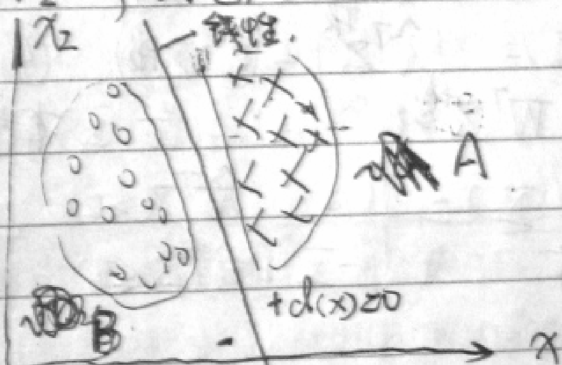
机器如何使用？

采用判决函数.

2. 判决函数



3. 线性判决函数.



直线方程：

$$d(x)=w_1x_1+w_2x_2+k=0$$

对于点 $a(a_1,a_2)\in A$

有 $d(a)=w_1a_1+w_2a_2+k>0$

对于点 $b(b_1,b_2)\in B$.

有 $d(b)=w_1b_1+w_2b_2+k<0$

因此，对于任意点 $X(x_1,x_2)$

若 $d(x)>0$ 则 $X\in A$

反之，则 $X\in B$.

二、~~LMS~~ 梯度算法求线性判决函数。

1、~~梯度~~ 梯度算法

$$\overline{W}(n+1) = \overline{W}(n) + \mu \frac{\partial J(n)}{\partial \overline{W}} \cdots\cdots ①$$

$J(n)$ 条件 必须有最小值

若 $J(n) = e^2(n) = [d(n) - y(n)]^2 \cdots\cdots ②$

则 $\overline{W}(n+1) = \overline{W}(n) + 2\mu e^*(n)\overline{X}(n)$ ③ 这时为 LMS 算法。

因此取不同的 $J(n)$ ~~的不同形式~~ 将得到不同的梯度算法

2、求判决函数的 ~~梯度~~ 梯度算法

(1) 对于点 $\overline{X} \in A$ 时，$d(x) > 0$，

此时 $\overline{W}^T\overline{X} > 0$，其中 $\overline{W} = [w_1, w_2, \cdots]^T$

$\overline{X} = [x_1, x_2]^T$

构造 $J(\hat{\overline{W}}, \overline{X}) = |\hat{\overline{W}}^T\overline{X}^{+k}| - (\hat{\overline{W}}^T\overline{X}^{+k}) \cdots\cdots ④$

$\because \overline{X} \in A \quad \therefore \overline{W}^T\overline{X}^{+k} > 0 \quad \therefore J(\hat{\overline{W}}, \overline{X})$ 有最小值 0

此时有 $\dfrac{\partial J(\hat{\overline{W}}, \overline{X})}{\partial \hat{\overline{W}}} = \begin{cases} 0, & \hat{\overline{W}}^T\overline{X} > 0 \\ -\overline{X}, & \hat{\overline{W}}^T\overline{X} \le 0 \end{cases} \cdots\cdots ⑤$

⑤ 代入 ① 有：

$$\begin{cases} \hat{\overline{W}}(n+1) = \hat{\overline{W}}(n), & \hat{\overline{W}}^T(n)\overline{X}^{+k} > 0 \\ \hat{\overline{W}}(n+1) = \hat{\overline{W}}(n) + \mu\overline{X}(n), & \hat{\overline{W}}^T(n)\overline{X}^{+k} \le 0 \end{cases}$$

(2) 对于点 $\overline{X} \in B$ 时，$d(x) < 0$

此时 $\overline{W}^T\overline{X}^{+k} < 0$ $\cdots\cdots ⑥$

构造 $J(\hat{\overline{W}}, \overline{X}) = |\hat{\overline{W}}^T\overline{X}^{+k}| + (\hat{\overline{W}}^T\overline{X}^{+k})$ $\because \overline{X} \in B$

$\therefore \overline{W}^T\overline{X} < 0$

$\therefore J(\hat{\overline{W}}, \overline{X})$ 有最小值

此时有 $\dfrac{\partial J(\hat{W},\underline{X})}{\partial \hat{W}} = \begin{cases} 0, & \hat{W}^T\underline{X} < 0 \\ \underline{X}, & \hat{W}^T\underline{X} \geq 0 \end{cases}$ ⑦

⑦代入③，有

$$\begin{cases} \hat{W}(n+1) = \hat{W}(n), & \hat{W}^T(n)\underline{X}^{+k} < 0 \\ \hat{W}(n+1) = \hat{W}(n) - \mu\underline{X}(n), & \hat{W}^T(n)\underline{X}^{+k} \geq 0 \end{cases}$$

练习、用梯度算法求下列两类模式的判决函数的权向量 W.

A: $\underline{X}_1=[0,0,0]^T$, $\underline{X}_2=[1,0,0]^T$, $\underline{X}_3=[1,0,1]^T$

$\underline{X}_4=[1,1,0]^T$

B: $\underline{X}_5=[0,0,1]^T$, $\underline{X}_6=[0,1,1]^T$, $\underline{X}_7=[0,1,0]^T$

$\underline{X}_8=[1,1,1]^T$

请选用不同的步长，计算 W.

并画出 W 的收敛曲线.

练习解答：　$\hat{W}^T \bar{X}$　x_8　x_8

$[0,0,1]$, $[0,1,1]$, $[0,1,0]$ $[1,1]$

对于点 $\bar{X}_n \in A$

$$\begin{cases} \hat{W}(n+1) = \hat{W}(n), & \hat{W}^T(n)\bar{X}(n)+k>0 \\ \hat{W}(n+1) = \hat{W}(n)+\mu\bar{X}(n), & \hat{W}^T(n)\bar{X}(n)+k\le 0 \end{cases}$$

对于点 $\bar{X}_n \in B$.

$$\begin{cases} \hat{W}(n+1) = \hat{W}(n) & \hat{W}^T(n)\bar{X}_n+k<0 \\ \hat{W}(n+1) = \hat{W}(n)-\mu\bar{X}_n, & \hat{W}^T(n)\bar{X}_n+k\ge 0 \end{cases}$$

令 $\hat{W}(0) = [0,0,0]$　　$k=1$　　$\mu=0.5$

$n=1$ 时.

集合A

$\hat{W}(0)\bar{X}_1+k>0$　　$\hat{W}(1) = \hat{W}(0)$

$\hat{W}(1)\bar{X}_2+k>0$　　$\hat{W}(1) = \hat{W}(1)$

$\hat{W}(1)\bar{X}_3+k>0$　　$\hat{W}(1) = \hat{W}(1)$

$\hat{W}(1)\bar{X}_4+k>0$　　$\hat{W}(1) = \hat{W}(1)$

n为循环次数，一次表示从 $\bar{X}_1$ 到 $\bar{X}_8$ 的计算

集合B.

$\hat{W}(1)\bar{X}_5+k>0$, $\hat{W}(1) = \hat{W}(1)-\mu\bar{X}_5 = [0,0,-0.5]$

$\hat{W}(1)\bar{X}_6+k>0$, $\hat{W}(1) = \hat{W}(1)-\mu\bar{X}_6 = [0,-0.5,-1.5]$

$\hat{W}(1)\bar{X}_7+k>0$, $\hat{W}(1) = \hat{W}(1)-\mu\bar{X}_7 = [0,-1,-1.5]$

$\hat{W}(1)\bar{X}_8+k>0$　$\cancel{\hat{W}(1) = \hat{W}(0)-\mu\bar{X}_8} = \hat{W}(1) = \hat{W}(1)$

$n=2$ 时.　$\cancel{\hat{W}(1) = \hat{W}(0)}$

集合A

$\hat{W}(1)\bar{X}_1+k>0$　　$\hat{W}(2) = \hat{W}(1)$

$\hat{W}(2)\bar{X}_2+k>0$　　$\hat{W}(2) = \hat{W}(2)$

$\hat{W}(2)\bar{X}_3+k\ge 0$　　$\hat{W}(2) = \hat{W}(2) = [0.5,-1,-0.5]$

$\hat{W}(2)\bar{X}_4+k=0$,　$\hat{W}(2) = \hat{W}(2)+\mu\bar{X}_4 = [0.5,-0.5,-0.5]$

~~0, 1.5, -0.5~~

集合B

$$\begin{cases} \hat{w}(2)\bar{X}_5+k>0 & \hat{w}(2)=\hat{w}(2)-\mu\bar{X}_5=[0.5,-1.5,-1] \\ \hat{w}(2)\bar{X}_6+k<0 & \hat{w}(2)=\hat{w}(2) \\ \hat{w}(2)\bar{X}_7+k>0 & \hat{w}(2)=\hat{w}(2)-\mu\bar{X}_7=[0.5,-1.5,-1] \\ \hat{w}(2)\bar{X}_8+k<0, & \hat{w}(2)=\hat{w}(2) \end{cases}$$

$[0.5,-1.5,-1]$

$n=3$ 时

$$A\begin{cases} \hat{w}(2)\bar{X}_1+k>0, & \hat{w}(3)=\hat{w}(2) \\ \hat{w}(3)\bar{X}_2+k>0, & \hat{w}(3)=\hat{w}(3) \\ \hat{w}(3)\bar{X}_3+k>0 & \hat{w}(3)=\hat{w}(3) \\ \hat{w}(3)\bar{X}_4+k=0 & \hat{w}(3)=\hat{w}(3)+\mu\bar{X}_4 \end{cases}$$

$[1,-[illegible],-1]$

$$B\begin{cases} \hat{w}(3)\bar{X}_5+k=0 & \hat{w}(3)=\hat{w}(3)-\mu\bar{X}_5=[[illegible],-1,-1.5] \\ \hat{w}(3)\bar{X}_6+k<0 & \hat{w}(3)=\hat{w}(3) \\ \hat{w}(3)\bar{X}_7+k=0 & \hat{w}(3)=\hat{w}(3)-\mu\bar{X}_7=[[illegible],-1.5,-1.5] \\ \hat{w}(3)\bar{X}_8+k<0, & \hat{w}(3)=\hat{w}(3) \end{cases}$$

$n=4$ 时

$$A\begin{cases} \hat{w}(3)\bar{X}_1+k>0, & \hat{w}(4)=\hat{w}(3) \\ \hat{w}(4)\bar{X}_2+k>0 & \hat{w}(4)=\hat{w}(4) \\ \hat{w}(4)\bar{X}_3+k=0 & \hat{w}(4)=\hat{w}(4)+[illegible] \\ \hat{w}(4)\bar{X}_4+k>0 & \hat{w}(4)=\hat{w}(4) \end{cases}$$

$$B\begin{cases} \hat{w}(4)\bar{X}_5+k=0 & \hat{w}(4)=\hat{w}(4)-[illegible],-1.5] \\ \hat{w}(4)\bar{X}_6+k<0 & \hat{w}(4)=\hat{w}(4) \\ \hat{w}(4)\bar{X}_7+k=0 & \hat{w}(4)=\hat{w}(4)+[illegible]=[1,-1.5,-1.5] \\ \hat{w}(4)\bar{X}_8+k<0, & \hat{w}(4)=\hat{w}(4). \end{cases}$$

$[1,-1.5,-1.5]$

编程: $\hat{W}(1)=[0,0,0]$, $k=1$, $\mu=0.5$

for $n=1:N$

~~if $\hat{W}(n)\,\overline{X}_1+k\le 0$~~

~~$\hat{W}(n)=\hat{W}(n)\,\overline{X}_1+\mu\overline{X}_1$~~

~~end~~

~~if $\hat{W}(n)\,\overline{X}_2+k\le 0$~~

~~$\hat{W}(n+1)=$~~

for $m=1:4$

if $\hat{W}(n)\,\overline{X}_m+k\le 0$

$\hat{W}(n)=\hat{W}(n)\,\overline{X}_m+\mu\overline{X}_m$

end

end

for $m=5:8$

if $\hat{W}(n)\,\overline{X}_m+k\ge 0$

~~$\hat{W}(n+1)=\hat{W}(n)$~~

$\hat{W}(n)=\hat{W}(n)\,\overline{X}_m-\mu\overline{X}_m$

end

end

1. 赋初值

① $\overline{W}(0)=[0,0,0]$

② $k=1$

③ $\mu=0.5$

2. 对于 $\overline{X}\in A$, 用式①

3. 对于 $\overline{X}\in B$, 用式②

是否收敛. 否 $n=n+1$ 回2. 是, 结束

4. ~~循环不[illegible]~~

ARMA 模型与方程误差(EEA)算法的总结

一、ARMA 模型

假设：(wold 分解定理)

① 对于一个平稳随机过程可以用白噪声激励一线性时不变系统来产生。

② 该线性系统可以用差分方程来表示。

2. 模型

$$x(n)+\sum_{i=1}^{p}a_i x(n-i)=e(n)+\sum_{j=1}^{q}b_j e(n-j).$$

$$y(n)+\sum_{i=1}^{p}a_i y(n-i)=x(n)+\sum_{j=1}^{q}b_j x(n-j)\cdots①$$

AR 系数　　MA 系数

$a_i=0$，MA 模型，FIR 滤波器，其中 $E[x(n)]=0$ $D[x(n)]=\sigma_n^2$ 白噪声

二、EEA 算法

1. LMS 与 EEA

LMS：$y(n)=\sum_{j=1}^{q}b_j x(n-j)$，即 MA 模型 FIR 滤器。通过迭代求 b_j。

但是在一些应用中，MA 模型并不适用

如声学中的回音。

NO. 2. 已知算法：　⑪这是一种自适应滤波器

Date 对①式整理：

$$y(n)=\sum_{i=1}^{p}a_i\,y(n-i)+\sum_{j=0}^{q}b_j\,x(n-j) \quad \text{—— ②}$$

用真实信号 $d(n-j)$ 替代 $y(n-j)$ 有：

$$\hat{y}(n)=\sum_{i=1}^{p}a_i\,d(n-i)+\sum_{j=0}^{q}b_j\,x(n-j) \cdots\cdots ③$$

误差信号： $e(n)=d(n)-\hat{y}(n) \cdots\cdots ④$

欲使 $\min E\{e^2(n)\}$，则：

$$\frac{\partial e^2(n)}{\partial a_i}=e^*(n)\,d(n-i) \cdots\cdots ⑤$$

$$\frac{\partial e^2(n)}{\partial b_j}=e(n)\,x(n-j) \cdots\cdots ⑥$$

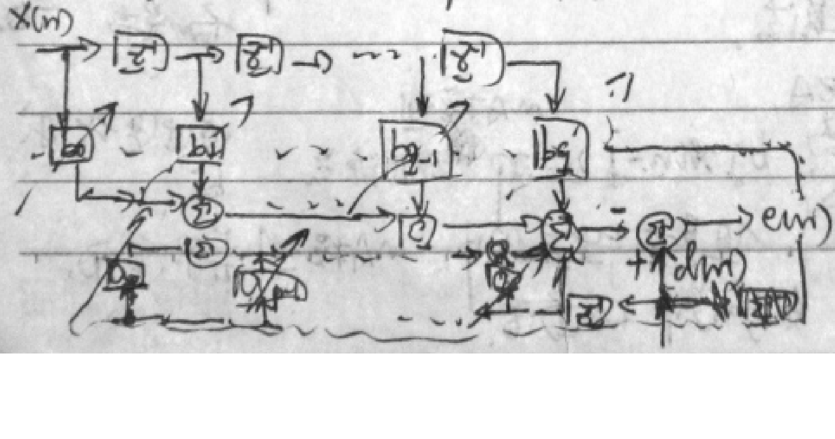
$$\begin{cases} a_i(n)=a_i(n-1)+\mu e(n)\,d(n-i) \\ b_j(n)=b_j(n-1)+\mu e(n)\,x(n-j) \end{cases} \cdots\cdots ⑦$$

令，$\theta(n)=[a_1(n),a_2(n)\cdots a_p(n),b_0(n),b_1(n)\cdots b_q(n)]^T$

$D(n)=[d(n-1),\cdots d(n-p),x(n)\cdots x(n-q)]^T$

则⑦式为：

$$\theta(n)=\theta(n-1)+\mu e^*(n)\,D(n).$$



ELA 算法步骤:

① 初始化 $\theta(0)=0$, $0<\mu<\lambda$

② 计算 $e(n)=d(n)-\hat{y}(n)$.

③ $\theta(n)=\theta(n-1)+\mu e(n)D(n)$

④ 判断是否收敛, 否 $n=n+1$ 回②

练习: 设滤波器输出为

$$y(t)=d(t-1)-0.5d(t-2)+0.3d(t-2)-0.2d(t-4)$$
$$+x(t)-0.8x(t-1)+0.6x(t-2)-0.3x(t-3)$$

当

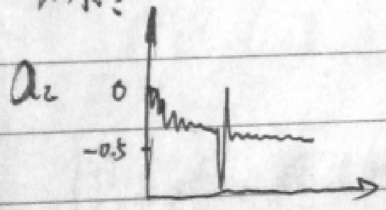
① 输入为正态分布的 均值为0, 方差为1的白噪声

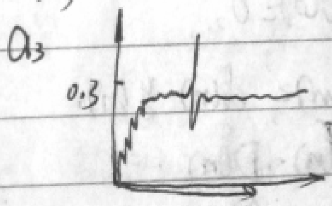
$\mu=0.1$, 0.15, 0.2 时 (参考值) $\mu=0.37$ 求迭代次数为 8000次的结果

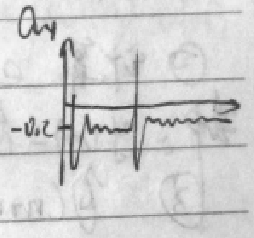
② 输入为均匀分布的随机信号

③ 输入为正弦信号.

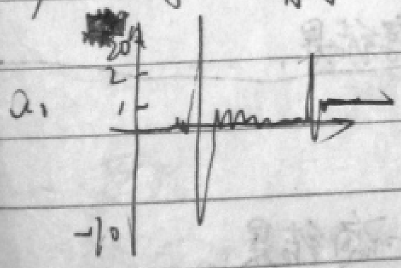
结果: (1) $\mu=0.1$ 时 (收敛)

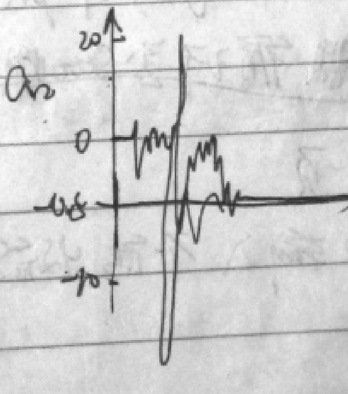




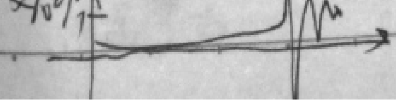


$\mu=0.15$ 时 (有时收敛)





$\mu=0.2$ 发散.



No.

输入为正态分布的信号

程序分析:

(1) ~~构造模型~~ 建立模型

① 构造 $\theta(n)$.

$\theta = [a_1(n), a_2(n) \sim a_p(n), b_0(n), b_1(n), \cdots b_q(n)]$

② 产生均值为0，方差为1的正态分布的白噪声信号 $x(n)$.

④ 产生真实信号 $d(n)$. $d(n)=\theta(n)\cdot D(n)$.

③ 构造 $D(n)$.

$D(n) = [d(n-1), d(n-2) \cdots d(n-p), x(n), x(n-1), \cdots x(n-q)]$

⑤ 确定 μ.

(2) EEA 算法.

① 初始化 $\hat{\theta}(0)=0$,

② 计算 $e(n)=d(n)-y(n)$.

其中: $y(n)=\hat{\theta}(n)\cdot D(n)$

③ $\hat{\theta}(n+1)=\hat{\theta}(n)+\mu e^*(n)D(n)$

④ n 循环至 8000, 观察结果.

结果前一页.

后两种输入不能收敛到正确结果.

Matlab 仿真:

(1) ① $\theta = [1, -0.5, 0.3, -0.2, 1, -0.8, 0.6, -0.3]^T$

② $X(n) = \mathrm{randn}(8000+M, 1)$. 信号

③ $D(n) = [d(n-1), d(n-2), d(n-3), d(n-4), X(n), X(n-1), X(n-2), X(n-3)]^T$

④ 产生 $d(n) = \theta \cdot D(n)$.

可从 $n=5$ 开始. 则 $d(1), d(2), d(3), d(4)$ 均为0.

(2) ① $\hat{\theta}(5) = 0$.

② for $n=5:8000+M$.

$D(n) = [d(n-1), d(n-2), d(n-3) \sim]$

$y(n) = \hat{\theta}^T(n) \cdot D(n)$.

$e(n) = d(n) - y(n)$.

$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + \mu e^*(n) \cdot D(n)$.

end.

③ plot, 横坐标 n, 纵坐标 $\hat{\theta}(n)$.

输出误差算法与~~ARMA模型~~

一、原理

ARMA模型

$$y(n)+\sum_{i=1}^{p}a_i y(n-i)=x(n)+\sum_{j=1}^{q}b_j x(n-j) \quad \cdots ①$$

①式变为

$$y(n)=\sum_{i=1}^{p}a_i(n)y(n-i)+\sum_{j=0}^{q}b_j x(n-j) \quad \cdots ②$$

~~误差信号~~：

$$\cancel{e(n)=d(n)-y(n)} \quad \cdots ③$$

对于梯度算法，

$$\hat{w}(n+1)=\hat{w}(n)+\mu\frac{\partial J(n)}{\partial w} \quad \cdots ③$$

令：$J(n)=e^2(n)=[y(n)-\hat{y}(n)]^2 \quad \cdots ④$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J(n)}{\partial a_i}=2e^*(n)\cdot\left[\hat{y}(n-i)+\sum_{i=1}a_i\dfrac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_i}\right]=2e^*(n)\cdot\dfrac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_i} \quad \cdots ⑤\\[2ex]\dfrac{\partial J(n)}{\partial b_j}=2e^*(n)\left[x(n-j)+\sum_{i=1}^{p}a_i(n)\dfrac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_j}\right]=2e^*(n)\cdot\dfrac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_j}\end{cases}$$

⑤代入③得：

$$\begin{cases}\hat{a}_i(n+1)=\hat{a}_i(n)+\mu e^*(n)\dfrac{\partial J(n)}{\partial a_i}\\[2ex]\hat{b}_j(n+1)=\hat{b}_j(n)+\mu e^*(n)\dfrac{\partial J(n)}{\partial b_j}\end{cases} \quad \cdots ⑥$$

令：$\hat{\theta}(n)=[\hat{a}_1(n),\hat{a}_2(n),\cdots\hat{a}_p(n),\hat{b}_0(n),\hat{b}_1(n),\cdots\hat{b}_q(n)]^T$

$\Upsilon'(n)=[\hat{y}'(n-1),\hat{y}'(n-2),\cdots\hat{y}'(n-p),x'(n),x'(n-1),\cdots x'(n-q)]^T$

②式变为 $\cancel{\hat{y}(n)=\hat{\theta}^T(n)}$ ⑥变为

$$\hat{\theta}(n+1)=\hat{\theta}(n)+\mu e^*(n)\Upsilon'(n)$$

练习：设期望信号 $d(n)$ 是一个(2,2)阶系统产生的信号，即：$y(n)=y(n-1)-0.5y(n-2)+x(n)+0.3x(n-1)$，$\mu=0.01$

当①输入为白噪声 ②均匀分布 ③正弦信号

迭代8000次的结果。

算法分析：

(1) 建立模型：

① 构造 θ

$$\theta = [a_1, a_2, \dots a_p, b_0, b_1, \dots b_q]^T$$

② 产生均值为0，方差为1的正态分布信号 $x(n)$

③ 构造 $Y(n) = [y(n-1), \dots y(n-p), x(n), \dots x(n-q)]^T$

其中，$y(n) = \theta^T Y(n)$，初始时刻令 $y(1), y(2), \dots y(p)$ 均为0，以 $p+1$ 开始。

④ 确定 μ 值

(2) OEA算法

① 初始化 $\hat{\theta}(p+1)=0$

② 计算 $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$，其中 $\hat{y}(n) = \hat{\theta}(n)\hat{Y}(n)$

$$\hat{Y}(n) = [\hat{y}(n-1), \hat{y}(n-2), \dots x(n)]^T$$

③ $\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + \mu e(n) Y'(n)$

$$Y'(n) = [\hat{y}'(n-1), \hat{y}'(n-2), \dots \hat{y}'(n-p), x'(n), \dots x'(n-q)]^T$$

关键求 $\hat{y}'(n), x'(n)$

④ 令：

$$\hat{y}'(n-i) = \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_i} = \hat{y}(n-i) + \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{\partial \hat{y}(n-k)}{\partial a_i} = \hat{y}(n-i) + \sum_{k=1}^{p} a_k y'[n-k-i]$$

$$x'(n-j) = \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_j} = x(n-j) + \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{\partial \hat{y}(n-k)}{\partial b_j} = x(n-j) + \sum_{k=1}^{p} a_k x'[n-k-j]$$

$$\hat{y}'(n-1) = \hat{y}(n-1) + a_1 y'[(n-1)-1] + a_2 y'[(n-2)-1]$$

$$\hat{y}'(n-2) = \hat{y}(n-2) + a_1 y'[(n-1)-2] + a_2 y'[(n-2)-2]$$

$$x'(n) = x(n) + a_1 x'[(n-1)] + a_2 x'[(n-2)]$$

$$x'(n-1) = x(n-1) + a_1 x'[(n-1)-1] + a_2 x'[(n-2)-1]$$

而令 $y'(1-1), \cancel{y'(1-2)} = 0$

$y'(2-1), y'(2-2) = 0$